

负实数阶广义 J 集的演化

王兴元 顾树生

(东北大学信息科学与工程学院, 沈阳 110006)

摘要 在阐述由复映射 $z \leftarrow z^\alpha + c (\alpha < 0)$ 所构造的广义 Julia 集(简称广义 J 集)定义的基础上,通过改变参数 α , 作出了一系列负实数阶的广义 J 分形图,当 α 为负整数时,广义 J 分形图呈现为一个由 $|\alpha|$ 个卫星群环绕中央行星的星群结构;而当 α 为负小数时,广义 J 分形图中则出现尺寸与 α 的小数部分成比例的部分卫星群.同时利用复变函数理论和计算机制图相结合的实验数学方法,研究了广义 J 集的分形结构特征及其演化过程,进而发现相角 θ 范围的不同选取导致了广义 J 集的不同演化,并首次给出了广义 J 集的 4 种演化过程.

关键词 广义 J 集 分形 演化

中图分类号: TP301.6 O29-TP301 文献标识码: A 文章编号: 1006-8961(2001)05-0491-05

The Evolution of the General Julia Sets for Negative Real Index Number

WANG Xing-yuan, GU Shu-sheng

(School of Information Science and Engineering, Northeastern University, Shenyang 110006)

Abstract This paper expounds the definition of the general Julia sets (they are called the general J sets for short) from the complex mapping $z \leftarrow z^\alpha + c (\alpha < 0)$. A series of interesting and rich families of fractal images are generated by changing a single parameter α . When α is a negative integer the fractal image has a planetary configuration consisting of a central planet with $|\alpha|$ major satellite structures. For noninteger values of α , additional embryonic satellite structures, proportional in size to the fractional part of α , are observed. Using the experimental mathematics method combining the theory of analytic function of one complex variable with computer aided drawing, we have analyzed the structural characteristics and the evolutions of the general J set for negative real index number. That the different evolution of the general J set results from the different choice of principal range for the phase angle θ is found, and the four evolutions of the general J set are given for the first time.

Keywords General J sets, Fractal, Evolution

0 引言

数学家 Mandelbort 利用计算机技巧,根据 Julia 和 Fatou 所开创的“复平面上有理映射迭代理论”的思想,研究了复平面 C 上 $f: z \leftarrow z^\alpha + c (\alpha = 2)$ 这样一个带有常数 c 的简单映射,且发现通过迭代,还能生成非常复杂的集,并将这一集合称为 Julia 集^[1].目前人们对 Julia 集已进行了深入研究,发现其中深藏着规律性的结构,从而大大丰富了分形理论^[2],而对 $\alpha \in R$ 时的广义 J 集却研究甚少,仅有

Lakhtakia 等人曾对 α 取正整数时的广义 J 集进行了研究^[3];Gujar 和 Bhavsar 研究了 $\alpha \in R$ 时的情况,并根据广义 J 集的视觉结构特点提出了几点假设^[4];在此基础上,Dhurandhar 等人又对 $\alpha < 0$ 时的广义 J 集的分形结构进行了理论上的探讨^[5].本文则首次给出了阶数 $\alpha < 0$ 时,广义 J 集的 4 种演化过程,并分析了导致这一演化的原因.

1 广义 J 集的定义

为了讨论广义 J 集的结构和演化,现模仿 Julia

集的定义,给出如下负实数阶广义J集的等价定义:

定义1 设 $f: z \leftarrow z^\alpha + c (\alpha < 0)$ 为黎曼球 \hat{C} 上的复映射, F_f 表示复平面 C 中那些轨道不收敛到无穷远点的点 z 的集合,即

$$F_f = \{z \in C: \{|f^k(z)|\}_{k=1}^\infty \text{ 是有界的}\}$$

则称此集为相应于 f 的填充广义J集, F_f 的边界则称为复映射 f 的广义J集,记为 J_f ,即 $J_f = \partial F_f$,该定义是绘制填充的广义J集 F_f 计算机图象的

出发点.

利用逃逸时间算法^[6],选取逃逸半径 $R=30$ 、逃逸时间限制 $N=256$ 、复常数 $c=0.5+0.5i$,绘制了 $\alpha < 0$ 时的广义J集(见图1、图2).图1中白色为稳定区 F_f ,黑色为不稳定区 \overline{F}_f .

若将 α 表示为 $\alpha = -(\eta + \epsilon)$,其中 η 是正整数, ϵ 为正小数,即 $0 < \epsilon < 1$,则根据分形图的结构特点,分两种情况来研究广义J集的演化.

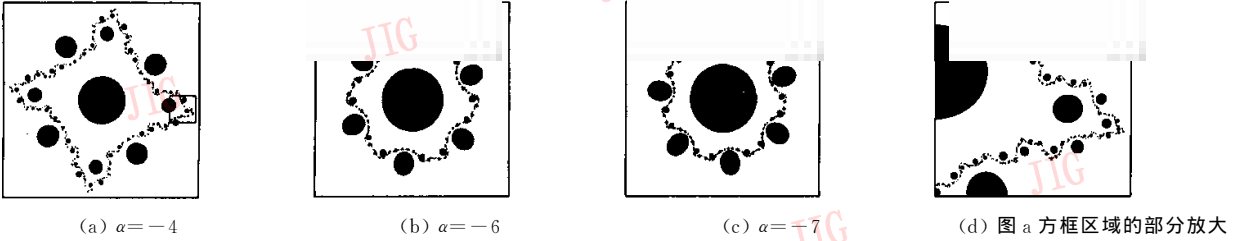


图1 α 为负整数时的广义J集

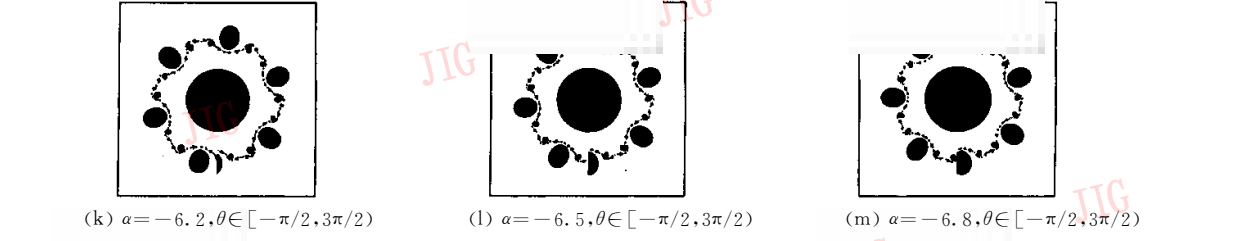
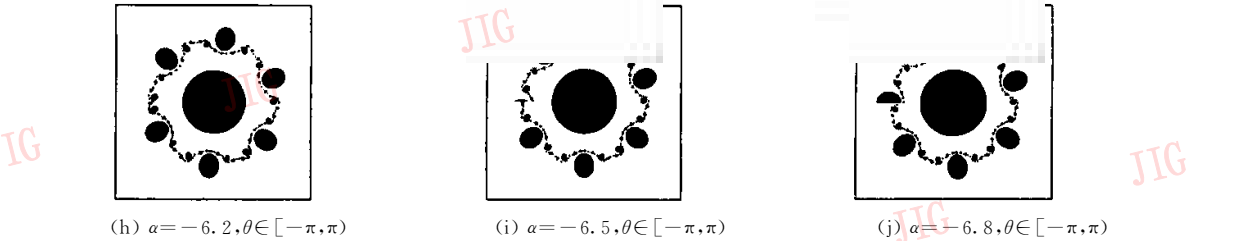
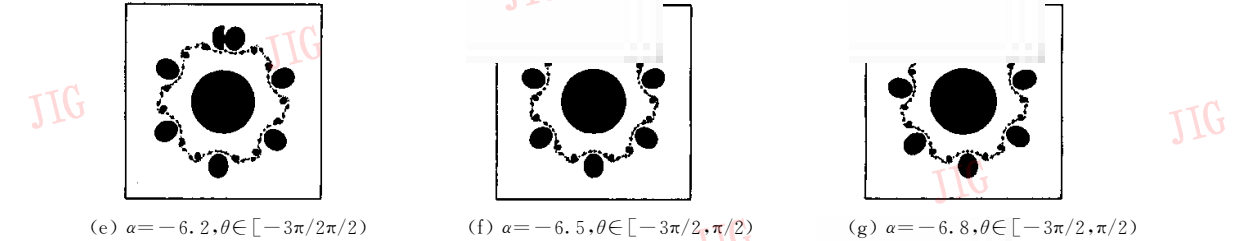
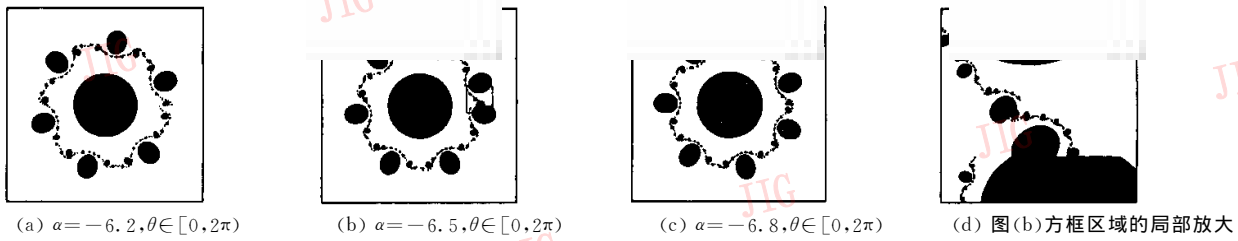


图2 α 为负小数时的广义J集

2 $\alpha = -\eta$ 的广义 J 集

图 1 为 $\alpha = -\eta$ 时的广义 J 集, 其类似 η 个卫星群环绕中央行星的星群结构, 且不稳定区嵌于稳定区之中. 下面给出广义 J 集的对称性定理:

定理 1 由复映射 $f: z \leftarrow z^\alpha + c (\alpha \in R)$ 来构造填充的广义 J 集, $\forall z_0 \in F_f$, 都有

$$f^k(z_0) = f^k(z_0 e^{i\frac{2\pi j}{\alpha}}) \quad (1 \leq k \leq N; 0 \leq j < |\alpha| - 1)$$

证明: 利用数学归纳法

$$\begin{aligned} \because f^1(z_0 e^{i\frac{2\pi j}{\alpha}}) &= (z_0 e^{i\frac{2\pi j}{\alpha}})^\alpha + c \\ &= z_0^\alpha e^{i(2\pi j)} + c = z_0^\alpha + c = f^1(z_0) \end{aligned}$$

故可设 $f^k(z_0) = f^k(z_0 e^{i\frac{2\pi j}{\alpha}})$ 成立.

又

$$\begin{aligned} \because f^{k+1}(z_0 e^{i\frac{2\pi j}{\alpha}}) &= f^k[f(z_0 e^{i\frac{2\pi j}{\alpha}})] \\ &= f^k[f^1(z_0)] = f^{k+1}(z_0) \end{aligned}$$

故命题真.

定理 1 说明, 若 $z_0 \in F_f$, 则 $z_0 e^{i\frac{2\pi j}{\alpha}} \in F_f$, 由此可见, 因为 α 为负整数的广义 J 集在以原点为顶点, 夹角为 $\frac{2\pi}{|\alpha|}$ 的区域生成后, 再旋转 $(|\alpha| - 1)$ 次 $\frac{2\pi}{|\alpha|}$ 弧度, 即可获得, 所以 α 为负整数的广义 J 集即为中心在原点的对称结构. 因为定理 1 的结论正是 Gujar 和 Bhavsar 根据 $\alpha = -\eta$ 时广义 J 集的对称性所提出的假设^[3], 所以这样即在理论上证明了 Gujar 和 Bhavsar 的假设.

Dhurandhar 等人已对 $\alpha = -\eta$ 时广义 J 集的分形结构进行了理论上的探讨, 其基本方法是: 由 $\alpha < 0$, 可知原点及其邻近点 $z (|z| < 1)$ 都满足 $|f^1(z)| \geq R$, 根据定理 1, 可知原点为行星中心, 故可认为中央行星上任意点 z 都满足 $|f^1(z)| \geq R$, 这里用 B^1 表示中央行星. Dhurandhar 等人利用复变函数理论, 给出了如下 $\alpha < 0$ 时广义 J 集的中央行星 B^1 结构特征定理^[5]:

定理 2 由复映射 $f: z \leftarrow z^\alpha + c (\alpha < 0)$ 所构造的广义 J 集的中央行星 B^1 为一个以原点为圆心、半径为 $R^{\frac{1}{\alpha}}$ 的近似圆, 其误差为 $\delta(\theta) \cong \frac{1}{R} \frac{|c|}{|\alpha|} \cos(|\alpha|\theta + \phi)$ (ϕ 是复数 c 的相角).

由图 1(a) 及其部分放大图(图 1(d))可见, 主要卫星周围环绕着小卫星, 小卫星周围又环绕着更小卫星……, 这种结构在不同水平上嵌套出现, 体现了广义 J 集的明显自相似结构特征. 若某卫星上的任

意点 z 满足 $|f^k(z)| \geq R$, 且 $|f^{k-1}(z)| < R$, 则用 $B^k (2 \leq k \leq N)$ 表示该卫星. 为此, Dhurandhar 等人又讨论了如下高阶卫星 B^k 的嵌套分布结构.

定理 3^[5] 由复映射 $f: z \leftarrow z^\alpha + c (\alpha = -\eta)$ 所构造的广义 J 集有 $|\alpha|$ 个中心坐标为 $(-c)^{\frac{1}{\alpha}}$ 的主要卫星 B^2 , B^2 两侧边缘与原点连线的夹角 $\Omega = \left(\frac{2}{|\alpha|} \right) \sin^{-1} \left(\frac{R^{\frac{1}{\alpha}}}{|c|} \right)$, 当且仅当 $|c| > R^{\frac{1}{\alpha}}$, B^2 存在.

根据定理 2, 中央行星 B^1 的半径为 $R^{\frac{1}{\alpha}}$; 又根据定理 3, 主要卫星 B^2 的中心位于半径为 $|c|^{\frac{1}{\alpha}}$ 的圆周上. 由此可见, α 越小, B^1 的半径越大, 并趋于 1; 由 $c = 0.5 + 0.5i$ 可知, B^2 的中心距原点的距离将逐渐减小, 并趋于 1, 所以随着 α 减小, 若 B^1 越接近 B^2 , 则 B^2 只有减小, 故可推出 B^1 的尺寸要大于 B^2 , 进而可推出 $B^k (2 \leq k \leq N)$ 随着 k 的增大而逐渐降低的尺寸.

由 $f: z \leftarrow z^\alpha + c (\alpha = -\eta)$ 可知, 其逆映射为 $f^{-1}: z \leftarrow (z - c)^{\frac{1}{\alpha}} (\alpha = -\eta)$, 故可将 B^k 表示为

$$B^k = \underbrace{f^{-1} \circ f^{-1} \circ \dots \circ f^{-1}}_{(k-1)\text{次}} \{B^1\} = \underbrace{f^{-1} \circ f^{-1} \circ \dots \circ f^{-1}}_{(k-2)\text{次}} \{B^2\}$$

因为 f^{-1} 有 $|\alpha|$ 个复数根, 又因 B^1 的数量为 1, B^2 的数量为 $|\alpha|$, 所以 f^{-1} 迭代 $(k-2)$ 次所产生 B^k 的数量为 $|\alpha|^{k-1}$.

$\forall z \in B^k, \exists f^1(z) \in B^{k-1}$. 设 B^k 的中心为 z_k , B^{k-1} 的中心为 z_{k-1} , 则 $f^1(z_k) = z_{k-1}$, 但这里需首先考虑 B^3 , 因为 B^2 的中心是 B^3 的中心 z_3 的像, 而且由定理 3 可知, B_2 的中心 $z_2 = (-c)^{\frac{1}{\alpha}}$, 故有

$$\begin{aligned} z_3^\alpha + c &= (-c)^{\frac{1}{\alpha}} \\ \therefore z_3 &= \left((-c)^{\frac{1}{\alpha}} - c \right)^{\frac{1}{\alpha}} \end{aligned} \quad (1)$$

同理, B^4 的中心坐标为

$$z_4 = \left(\left((-c)^{\frac{1}{\alpha}} - c \right)^{\frac{1}{\alpha}} - c \right)^{\frac{1}{\alpha}} \quad (2)$$

将式(2)按该方式扩展, 即可求出更高阶的小卫星中心的位置. 当逃逸时间限制在 $N \rightarrow \infty$ 时, 可推知 $\alpha = -\eta$ 时的广义 J 集具有无穷嵌套的自相似几何结构.

3 $\alpha = -(\eta + \varepsilon)$ 的广义 J 集

图 2 为 $\alpha = -(\eta + \varepsilon)$ 时的广义 J 集, 它具有类似 η 个完整卫星群及一部分卫星群环绕中央行星的不对称星群结构, 并随 ε 的增大, 部分卫星群不断发育

而演化成为一个完整卫星群(图 2(a)~图 2(c)、图 2(e)~图 2(m)). 广义 J 集上述裂变演化规律可解释为由复映射

$$z \leftarrow z^\alpha + c \quad (\alpha < 0) \quad (3)$$

来构造广义 J 集, 其中对 z^α 的计算, 采用了 DeMoivre 理论

$$z^\alpha = r^\alpha (\cos \alpha \theta + i \sin \alpha \theta) \quad (4)$$

虽然式(4)的每一次迭代, z 都是从直角坐标转换到极坐标, 以便计算 z^α , 然后再转换回直角坐标而与复常数 c 进行相加, 但从复平面的直角坐标 (x, y) 转换到极坐标 (r, θ) , 相角 θ 的范围一般可选取以下 4 种情况: $\theta \in [0, 2\pi)$, $\theta \in [-3\pi/2, \pi/2)$, $\theta \in [-\pi, \pi)$ 和 $\theta \in [-\pi/2, 3\pi/2)$. 当 $\alpha = -\eta$ 时, 将不会影响式(4)的使用, 因为

$$\begin{cases} \cos(\alpha\theta) = \cos(\alpha\theta + 2\pi\alpha) \\ \sin(\alpha\theta) = \sin(\alpha\theta + 2\pi\alpha) \end{cases} \quad (5)$$

但当 $\alpha = -(\eta + \varepsilon)$ 时, 则式(5)不成立, 由此可见 θ 范围的不同选取将导致广义 J 集的不同演化. 另外, 在使用式(5)时, $\alpha\theta$ 可能超出上述 4 种情况的范围, 为此, 要通过使 $\alpha\theta$ 加或减 $2m\pi$ ($m=1, 2, 3, \dots$) 来进行调整, 这就导致了广义 J 集的错动, 出现了不对称卫星群结构.

对于负整数的 α 值, 由定理 3 可知, 一个完整的主要卫星 B^2 的中心相角为 $\frac{(\pi + \phi)}{\alpha}$. 若分别用 θ^+ 和 θ^- 来表示属于这个 B^2 的点的最大和最小相角, 则

$$\theta^\pm = \frac{(\pi + \phi)}{\alpha} \pm \frac{\Omega}{2}$$

虽然根据定理 1, 可利用一主要卫星 B^2 , 通过按顺时针或逆时针方向旋转 $(|\alpha| - 1)$ 倍的 $\frac{2\pi}{|\alpha|}$ 弧度来获得广义 J 集的其余主要卫星, 但上述相角 θ 的选取在 $+x, +y, -x$ 或 $-y$ 轴处的不连续性, 将不允许这个 B^2 通过 $+x, +y, -x$ 或 $-y$ 轴, 这就导致穿过 x 或 y 轴(从两个方向)的 B^2 部分消失, 从而仅出现了部分卫星 B^2 , 且仅出现在相角 θ 不连续的 $+x, +y, -x$ 或 $-y$ 轴处, 这种可见部分主要卫星 B^2 的出现也只是仅当 α 取负小数时. 下面以选取相角 $\theta \in [0, 2\pi)$ 为例(图 2(a)~图 2(c)), 来定量说明这一现象. 当某一完整的主要卫星 B^2 穿过 $+x$ 轴时, 如果有正整数 n 和 n' 满足

$$\begin{cases} \theta^+ + \frac{2\pi n}{|\alpha|} > 2\pi > \theta^- + \frac{2\pi n}{|\alpha|} \\ \theta^- - \frac{2\pi n'}{|\alpha|} < 0 < \theta^+ - \frac{2\pi n'}{|\alpha|} \end{cases}$$

则将导致部分主要卫星 B^2 的出现. 对于情况 1, 其部分主要卫星 B^2 将出现在 $+x$ 轴下方到相角为 $(\theta^- + \frac{2\pi n}{|\alpha|})$ 处; 对于情况 2, 则部分主要卫星 B^2 将出现在 $+x$ 轴上方到相角为 $(\theta^+ - \frac{2\pi n'}{|\alpha|})$ 处. 对于负小数的 α 值, 由前面对小卫星的讨论可知, 部分卫星 B^2 经逆映射 f^{-1} 将产生较小的部分卫星 B^3 , 且这种较小的部分卫星 B^3 经逆映射 f^{-1} 将产生更小的部分卫星 B^4, \dots , 这样部分卫星 B^2 将导致它的一系列高阶次的原像小部分卫星 B^k ($k=2, 3, \dots, N$) 的出现(即出现部分卫星群), 图 2(d)中给出的部分主要卫星 B^2 和小部分卫星 B^k 也证明了这一点. 同理, 还可对相角选取为另 3 种情况, 即 $\theta \in [-3\pi/2, \pi/2)$, $\theta \in [-\pi, \pi)$ 和 $\theta \in [-\pi/2, 3\pi/2)$ 时广义 J 集的裂变演化规律进行定量说明.

4 结 论

本文利用复变函数理论和计算机制图相结合的实验数学方法, 研究了 $\alpha < 0$ 的广义 J 集的演化. 通过研究发现, 广义 J 集的几何特征依赖于参数 α, R 和 c , 而其演化过程则依赖于相角 θ 范围的选取. 需要指出的是, 当 $\alpha = -(\eta + \varepsilon)$ 时, 由于 Dhurandhar 等人仅对相角 $\theta \in [-\pi, \pi)$ 的广义 J 集的裂变演化规律进行了研究, 因此其结果是不完整的. 而本文则对相角选取以上 4 种情况的广义 J 集的裂变演化规律都进行了研究, 由此得到了是完整的结果. 虽然取得一定进展, 但广义 J 集的分形结构和性质仍需要深入研究.

参 考 文 献

- 1 Mandelbrot B B. The fractal geometry of nature. San Fransisco: Freeman W H, 1982: 1~10.
- 2 Peitgen H O, Saupe D. The science of fractal images. Berlin: Springer-Verlag, 1988: 137~218.
- 3 Lakhtakia A, Varadan V V, Messier R *et al.* On the symmetries of the Julia sets for the process $z \leftarrow z^p + c$. J Phys A: Math Gen. 1987, 20: 3533~3535.
- 4 Gujar U G, Bhavsar V C, Vangala N. Fractals images from $z \leftarrow z^\alpha + c$ in the Complex z -plane. Computers & Graphics, 1992, 16(1): 45~49.
- 5 Dhurandhar S V, Bhavsar V C, Gujar U G. Analysis of z -plane fractals images from $z \leftarrow z^\alpha + c$ for $\alpha < 0$. Computers & Graphics, 1993, 17(1): 89~94.
- 6 王兴元, 刘向东, 朱伟勇. 由复映射 $z \leftarrow z^p + c$ ($\alpha < 0$) 所构造的广义 M-集的研究. 数学物理学报, 1999, 19(1): 73~79.

王兴元 1987年和1992年获天津大学学士和硕士学位,1999年获东北大学博士学位,现为东北大学自动化专业博士后研究人员、副教授,主要研究方向为混沌与分形理论及其在生物医学工程中的应用。

顾树生 1939年生,1963年毕业于东北工学院自控系,现为东北大学信息科学与工程学院教授,博士生导师。

新书简介

《数字图像的智能信息处理》

河海大学徐立中教授编著的《数字图像的智能信息处理》一书,近期将由国防工业出版社出版。著名信息科学家、东南大学教授何振亚为该书作序。

该书是有关数字图象智能信息处理方面的专著。近年来作者跟踪了国际上新兴的软计算、计算智能方向的研究热点,较为深入地研究了模糊集理论、遗传算法、神经网络、粗糙集理论以及它们相互结合的方法用于数字图象的处理。全书共分八章,内容包括:综述有关软计算与计算智能的研究以及信息处理的主要软计算方法;图象预处理基本技术;基于模糊集和粗糙集理论的图象预处理技术;基于遗传算法的图象恢复方法及模糊与遗传算法结合的图象恢复方法;图象压缩编码的有关基础知识和几种国际标准;神经网络压缩编码;粗糙集与神经网络结合的矢量量化编码方法;信息融合编码方法等。

该书内容新颖,注重理论联系实际,可作为电子信息工程、计算机应用、工业自动化、机械电子工程等相关专业的工程技术人员、科研人员、研究生和高年级本科生参考使用。